

固有値解析によるテンセグリティの形状設計と安定性条件

Eigenvalue Analysis for Shape Design and Stability Conditions for Tensegrity Structures

大崎 純 (京都大・工) 張 景耀 (京都大・工)

Makoto OHSAKI, Kyoto University

Jingyao Zhang, Kyoto University

Fax: 075-383-2972, E-mail: ohsaki@archi.kyoto-u.ac.jp

A numerical method is presented for form-finding of tensegrity structures. Eigenvalue analysis and spectral decomposition are carried out iteratively to find the feasible set of force densities that satisfies the requirement on rank deficiency of the equilibrium matrix with respect to the nodal coordinates. Stability conditions are discussed in detail using the eigenvalues and eigenvectors of the linear and geometrical stiffness matrices.

1 テンセグリティの形状設計

互いに接触しない棒材 (ストラット) と、張力の導入される連続なケーブルで構成されるピン接合構造物を、テンセグリティ構造という [1]。このような張力構造物に対して、自重を無視し、外力の作用しない自己釣合い状態での形状を求めることを、釣合い形状解析という。

部材数を m 、節点数を n とする。部材 i の軸力を N_i 、長さを L_i としたとき、 $q_i = N_i/L_i$ を軸力密度 (force density) といい、そのベクトルを \mathbf{q} とする [2]。各節点の x, y, z 座標をまとめたベクトルを、それぞれ $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ とし、それらに関する釣合い行列を \mathbf{E} で定義すると、構造物の自己釣合方程式は次のように書ける。

$$\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{Y} = \mathbf{E}\mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (1)$$

ここで、 \mathbf{E} は \mathbf{q} の関数であり、実対称行列である。テンセグリティの釣合い形状解析において、形状が退化しないためには、 \mathbf{E} のランクは次の条件を満足する必要がある [1]。

$$\text{rank } \mathbf{E} = n - h^* \quad (2)$$

ここで、2次元構造物では $h^* = 3$ であり、3次元構造物では $h^* = 4$ である。 \mathbf{q} の成分に対しては、値を直接指定することも可能であり、また、対称性から必然的に満たされるべき関係も存在する。それらの条件と釣合い条件をまとめて \mathbf{q} に関する次のような線形制約式が得られる。

$$\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (3)$$

\mathbf{B} は一般に正則ではなく、 \mathbf{q} の最小 2 乗解は

$$\mathbf{q} = \mathbf{B}^- \mathbf{g} \quad (4)$$

のように書ける。ここで、 \mathbf{B}^- は \mathbf{B} の一般逆行列である。行列 \mathbf{E} の固有値解析を行い、固有ベクトルを並べた行列 \mathbf{U} と、固有値を対角成分に持つ対角行列 \mathbf{S} を用いて、 \mathbf{E} は次のようにスペクトル分解できる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^\top \quad (5)$$

\mathbf{E} の非零の固有値の数が \mathbf{E} のランクと一致する。したがって、 \mathbf{S} の最小の h^* 個の固有値をゼロにした行列 $\bar{\mathbf{S}}$ を用いて $\bar{\mathbf{E}}$ を次のように構成する。

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{S}}\mathbf{U}^\top \quad (6)$$

このとき、 $\bar{\mathbf{E}}$ は条件式 (2) を満足する。しかし、最小 2 乗解 (4) が近似解なので、(6) で求められる釣合行列は厳密に条件式 (2) を満足しない。したがって、次のような繰返し計算で \mathbf{E} のランク条件を満たす \mathbf{q} を求める。

Step 0: トポロジー (部材と節点の接続関係) を設定し、force density ベクトル \mathbf{q} の初期値を与える。

Step 1: \mathbf{q} から釣合行列 \mathbf{E} を作成し、ランクを計算する。条件 (2) を満足すれば、アルゴリズムを終了する。

Step 2: \mathbf{E} の固有値解析を行い、最小の h^* 個の固有値をゼロにし、新しい釣合行列 \mathbf{E} を (6) を用いて構成する。

Step 3: 釣合行列と force density に関する制約とまとめて行列 \mathbf{B} を作成する。 \mathbf{q} の最小 2 乗解を (4) で計算し、Step 1 に戻る。

このアルゴリズムによって、条件 (2) を満足する force density ベクトル \mathbf{q} が得られる。自己釣合い方程式 (1) と条件 (2) から、 x, y, z 軸方向にそれぞれ h^* 個の線形独立な節点座標を任意に指定すると、構造物の形状を一意に決めることができる [3]。

2 安定性条件

テンセグリティは支持条件の存在しない自立した構造なので、以下で安定性を検討する際に、剛体モードを拘束した構造を考える。このとき、テンセグリティの安定性は、釣合い形状での接線剛性行列 \mathbf{K} の r 次固有値 λ_r を用いて判定できる。接線剛性行列 \mathbf{K} は、線形剛性行列 \mathbf{K}^E と幾何剛性行列 \mathbf{K}^G の和として $\mathbf{K} = \mathbf{K}^E + \mathbf{K}^G$ のように定義できる。 \mathbf{K}^E と \mathbf{K}^G の r 次固有値、固有ベクトルを、それぞれ λ_r^E, Ψ_r^E 及び λ_r^G, Ψ_r^G で表す。固有ベクトルは、次のように正規直交化する。

$$(\Psi_r^E)^\top \Psi_s^E = (\Psi_r^G)^\top \Psi_s^G = \delta_{rs} \quad (7)$$

ここで、 δ_{rs} はクロネッカーのデルタである。任意のベクトル ρ は、 Ψ_r^E あるいは Ψ_r^G の線形結合として

$$\rho = \sum_{i=1}^f \alpha_i \Psi_i^E = \sum_{i=1}^f \gamma_i \Psi_i^G \quad (8)$$

のように表すことができる。ここで、 f は剛体変位を拘束した後の変位の自由度である。したがって、正規化条件 (7) を用いると、 \mathbf{K} の 2 次形式は次のように書ける。

$$\rho^\top \mathbf{K} \rho = \sum_{i=1}^f \alpha_i^2 \lambda_i^E = \sum_{i=1}^f \gamma_i^2 \lambda_i^G \quad (9)$$

λ_i^E 及び λ_i^G のなかで、 $\lambda_i^E = 0$ 及び $\lambda_i^G < 0$ がそれぞれ成立する添字 (次数) の集合を J^E 及び J^G で表す。また、テンセグリティは、一般に張力が存在しないとき剛体モード以外の不安定な変形モードが存在するので、 J^E は空でないものとする。このとき、安定性に関して、次のような条件が成立する。

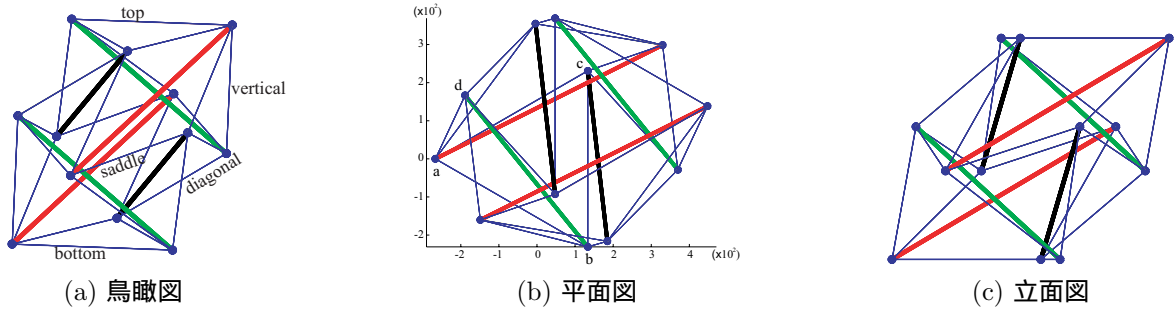


Fig. 1: A two-stage tensegrity structure.

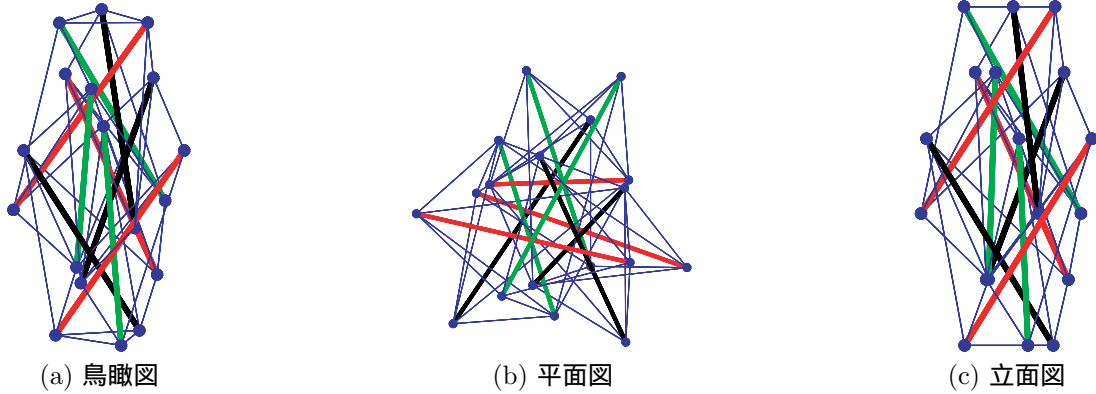


Fig. 2: A three-stage tensegrity structure.

1. $\lambda_r > 0$, ($r = 1, \dots, f$) のとき安定である。
2. Ψ_i^E ($i \in J^E$) が Ψ_i^G ($i \in J^G$) の線形結合で表されるとき, 不安定である。
3. 安定な構造において張力の符号を全て入れ替えると, 不安定になる。
4. $\lambda_{\min}^E = \min_{i \in J^E} \lambda_i^E$, $\lambda_{\min}^G = \min_{i \in J^G} \lambda_i^G$ とする。次の 2 つの条件が成立するとき安定である。
 - (a) 全てのベクトル Ψ_i^E ($i \in J^E$) が Ψ_i^G ($i \notin J^G$) の線形結合で表され, 少なくとも 1 つの正の固有値 λ_j^G に関する固有モードの成分が 0 でない。
 - (b) 張力は十分に小さく, $\lambda_{\min}^E + \lambda_{\min}^G > 0$ が成立する。

3 例題

3.1 2層テンセグリティ構造

Fig. 1(a) に示すような, 12 節点 30 部材からなる 2 層テンセグリティ構造の形状設計を行う。6 個のストラットを (1) 上層, (2) 下層の 2 グループに分け, ケーブルを Fig. 1(a) に示すように (3) top and bottom base, (4) saddle, (5) vertical, (6) diagonal の 4 グループに分け, 6 個のそれぞれグループ内で force density は同一であるとする。

Force density の初期値を $\{-1.5, -1.5, 1.0, 2.0, 1.0, 1.0\}$ とすると, ランク条件を満たす force density $\{-1.8376, -1.8376, 0.9281, 1.9918, 1.1737, 0.9958\}$ が得られた。続いて Fig. 1(a) に示す節点 a, b, c, d の座標を $\{(-2.6667, 0.0, 0.0), (1.3333, -2.3094, 0.0), (1.3334, 2.3094, 0.0), (-1.8867, 1.6666, 3.3333)\}$ のように指定すると, Fig. 1 に示すような形状が得られた。

3.2 3層テンセグリティ構造

Fig. 2(a) に示すような 3 層テンセグリティ構造において, 最小固有値でなく絶対値が 0 に最も近い h^* 個の E

の固有値を 0 とする操作を繰り返すと, Fig. 2 のような形状が得られた。詳細は文献 [3] に示したとおりである。得られた形状において, E は 2 個の負の固有値 -0.5105 を持つ。しかし, 剛体モードを拘束した後の K は正定値であり, 最小固有値は 1.9481 である。また, K^E の正の最小固有値は 5.6387 であり, 安定性条件 4 の条件 (b) が成立していることが確認できる。

4 結論

節点座標に関する釣合い行列 (幾何剛性行列) の固有値解析を行い, 最小 (あるいは絶対値が最小) の固有値を 0 としてスペクトル分解によって釣合い行列を再構成する過程を繰り返すことにより, ランクに関する制約を満たすテンセグリティ構造が得られる。

また, 幾何剛性行列の固有値が負であっても, 張力が存在しない状態で不安定なテンセグリティ構造を張力導入によって安定化できる。

参考文献

- [1] N. Vassart. and R. Motro, Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems, Int. J. Space Struct., Vol. 14(2), pp. 147-154, 1999.
- [2] H.-J. Schek, The force density method for form finding and computation of general networks, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 3, pp. 115-134, 1974.
- [3] J. Y. Zhang and M. Ohsaki, Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures, Int. J. Solids, Struct., in press.